

©2005. В.П. Бурский, О.В. Самойлова

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА-КАЦА В ВОПРОСАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для системы параболических уравнений с матричным потенциалом вида $A/|x|^2$ находятся достаточные условия существования и достаточные условия несуществования положительного решения задачи Коши в $\mathbb{R}^N$ на коэффициенты постоянной матрицы A . Эти условия несколько различаются между собой.

В работе [1] была рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u & (x \in \mathbb{R}^N, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (1)$$

$$0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad V(x) = \frac{c}{|x|^2}$$

Интерес к задаче с указанным потенциалом вызван тем, что, как известно, при $0 \leq V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, $V(x) \leq c/|x|^{2-\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в окрестности нуля задача (1) имеет единственное неотрицательное решение в смысле распределений, а при $V(x) \geq c/|x|^{2+\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности нуля, задача (1), как показали Брезис и Лионс (*H. Brezis* и *I. L. Lions*), не имеет неотрицательного решения.

Наряду с задачей (1) рассматривается задача (2), которая получается из (1) при замене $V(x)$ на $V_n(x)$, где $V_n(x)$ определяется следующим образом:

$$V_n(x) = \begin{cases} c/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ cn^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

т.е. (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + V_n(x)u_n & (x \in \mathbb{R}^N, t > 0) \\ u_n(x, 0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (2)$$

Результатом работы [1] является теорема:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_n(x, t)$ удовлетворяет (2).

1. Пусть $c > c^* = c^*(N) = (N-2)^2/4$. Тогда $u_n(x, t) \rightarrow \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$. И поэтому задача (1) не имеет неотрицательного решения.

2. Пусть $0 \leq c \leq c^*$. Тогда u_n возрастает к решению u из (1) в смысле распределений тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\alpha} f(x) dx < \infty$, где α меньший действительный корень уравнения $(N-2-\alpha)\alpha = c$.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в работе [1], на системы сингулярных параболических уравнений. Отметим также, что доказательство результатов существенно использует методику работы [1]. Будут доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\bar{u}_n(x, t)$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \bar{u}_n + \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix} \bar{u}_n, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ \bar{u}_n(x, 0) = \bar{u}_0(x), & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_0^p \end{pmatrix}, \quad V_n^{ij}(x) = \begin{cases} c^{ij}/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ c^{ij}n^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

$$u_0^j \geq 0, \quad u_0^j = L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad j = \overline{1, p}.$$

(При необходимости $V_n^{ij}(x)$ можно выбрать сглаженными.) Пусть $c^{ii} > \pi^2 N^2 q/8$, $q = \max\{q^i\}$, $q_i > 0$, $c^{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, p}$. Тогда $\bar{u}_n(x, t) \rightarrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\bar{u}(x, t)$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \bar{u} + \begin{pmatrix} V^{11} & \dots & V^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V^{p1}(x) & \dots & V^{pp}(x) \end{pmatrix} \bar{u}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), & (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (4)$$

$V^{ij}(x) = c^{ij}/|x|^2$. Пусть $S = \max_i S_i/q^i$, где S_i - сумма элементов i -й строки матрицы $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$. Если $S \leq (N-2)^2/4$, то задача (4) имеет неотрицательное решение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\bar{u}_n$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} = \Delta \bar{u}_n + \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x) \\ V_n^p(x) & 0 \end{pmatrix} \bar{u}_n, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ \bar{u}_n(x, 0) = \bar{u}_0(x), & (x \in \mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } \bar{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{pmatrix},$$

$$V_n^i(x) = \begin{cases} C^i/|x|^2, & |x| \geq 1/n + \delta_n, \\ C^i \cdot n^2, & |x| < 1/n, \\ \text{сглаживание с малым } \delta_n, & 1/n \leq |x| \leq 1/n + \delta_n, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\sqrt{C^1 C^2} > \frac{\pi^2 N^2}{8}$. Тогда $\bar{u}_n \rightarrow \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.

ТЕОРЕМА 5. Если $\sqrt{C^1 C^2} \leq (\frac{N-2}{2})^2$, то задача

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \Delta \bar{u} + \begin{pmatrix} 0 & V^1(x) \\ V^p(x) & 0 \end{pmatrix} \bar{u}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), & (x \in \mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (6)$$

где $\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $V^i(x) = \frac{C^i}{|x|^2}$, $u_0^i \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$ имеет неотрицательное решение.

Следуя работе [5], определим вероятностную меру $P_t(x, dy) := P_t(x - y)dy$, т.е. $P_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} P_t(x - y)dy$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, где $P_t(x) = (4\pi Dt)^{-N/2} \exp\{-|x|^2/4Dt\}$, $t > 0$, $D > 0$ плотность нормального распределения с параметрами $(0, 2D)$. Пусть $\dot{\mathbb{R}}^N$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^N$, и пусть Ω ($\Omega \subset \prod_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\mathbb{R}}^N$) — множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ в $\dot{\mathbb{R}}^N$.

Определим ограниченную функцию φ из $C(\Omega)$ в $\mathbb{R}$ для заданных n, Φ и t_j правилом: $\varphi(\omega) = \Phi(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n))$ для $\omega \in \Omega$, когда $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\Phi \in C((\dot{\mathbb{R}}^N)^N, \mathbb{R})$.

Мера Винера W_x , определенная как мера Лебега на σ -алгебре цилиндрических множеств (см. [2]), обладает свойством

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega) W_x(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x_1, \dots, x_n) P_{t_1}(x, dx_1) \dots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n).$$

Пусть непрерывная функция $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \dot{\mathbb{R}}^N$ удовлетворяет условию $\omega(0) = x$. Мера Винера можно понимать как распределение случайных траекторий частицы, начинающей свое движение в момент времени $t = 0$ из точки x .

Напомним, что набор вероятностных мер W_x на Ω определяет винеровский процесс $\omega(t)$, если выполняются следующие условия:

- а) пространство Ω содержит только непрерывные функции;
- б) $W_x\{\omega(0) = x\} = 1$;
- в) случайное приращение $\omega(t + s) - \omega(s)$ при $s \geq 0$, $t > 0$, имеет симметричное нормальное распределение с плотностью $P_t(x)$ и это приращение не зависит от любых событий и любых случайных величин, определяемых по поведению траектории $\omega(t)$ до момента s .

В частности, для любой области $\Gamma \subset \mathbb{R}$ (см. [4]):

$$W_x\{\omega(t) \in \Gamma\} = W_x\{\omega(t) - \omega(0) \in \Gamma - x\} = \int_{\Gamma - x} P_t(y) dy = \int_{\Gamma} P_t(z - x) dz \quad (t > 0, x \in \mathbb{R})$$

Решением уравнения диффузии $\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \Delta \psi + V(x, t) \psi$ является вероятность попадания частицы из начального состояния в точку (x, t) . Рассматривая вклады отдельных траекторий в решение уравнения как значения плотности некоторой меры на соответствующих траекториях, получается представление решения в виде интеграла по этой мере,

Из равенств (9),(10) видно, что

$$(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n}\bar{u}_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^p}} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(y) & \dots & V_n^{1p}(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(y) & \dots & V_n^{pp}(y) \end{pmatrix} \right\} \bar{u}_0(y) dy.$$

Тогда $(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n})^m \bar{u}_0(x) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(x_1) & \dots & V_n^{1p}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x_1) & \dots & V_n^{pp}(x_1) \end{pmatrix} \right\} \int_{\mathbb{R}^N} \dots \\ &\dots \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(x_m) & \dots & V_n^{1p}(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x_m) & \dots & V_n^{pp}(x_m) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_0^1(x_m) \\ \vdots \\ u_0^p(x_m) \end{pmatrix} dx_m \dots dx_1 \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_1) \end{pmatrix} \right\} \int_{\mathbb{R}^N} \dots \\ &\dots \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(x_m) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_m) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_0^1(x_m) \\ \vdots \\ u_0^p(x_m) \end{pmatrix} dx_m \dots dx_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} V_n^{11}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_1) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_0^1(x_1) \\ \vdots \\ u_0^p(x_1) \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_m = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \left(\begin{array}{cccc} (4\pi \frac{t}{m} q^1)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m - x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & (4\pi \frac{t}{m} q^p)^{-N/2} \exp\{-\frac{|x_m - x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\} \end{array} \right) \cdot \\
 & \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{t}{m} \left(\begin{array}{cccc} V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j) \end{array} \right) \right\} \bar{u}_0(x_m) dx_m \dots dx_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \dots \\
 & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\begin{array}{cccc} P_{\frac{t}{m}q^1}(x, dx_1) \dots P_{\frac{t}{m}q^1}(x_{m-1}, dx_m) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & P_{\frac{t}{m}q^p}(x, dx_1) \dots P_{\frac{t}{m}q^p}(x_{m-1}, dx_m) \end{array} \right) \\
 & \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{t}{m} \left(\begin{array}{cccc} V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j) \end{array} \right) \right\} \bar{u}_0(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\
 & \rightarrow \int_{\Omega} \left(\begin{array}{ccc} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{array} \right) \exp \left\{ \int_0^t \left(\begin{array}{ccc} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{array} \right) ds \right\} \bar{u}_0(\omega(t)), \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $W_x^{q^i}$ удовлетворяет свойству:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x_1, \dots, x_n) P_{t_1 q^i}(x, dx_1) \dots P_{(t_n - t_{n-1} q^i)}(x_{n-1}, dx_n) = \int_{\Omega} \varphi(\omega) W_x^{q^i}(d\omega).$$

Предел левой части (11) при $m \rightarrow \infty$ равен $\bar{u}_n(x, t)$, как это следует из (8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если функция $\bar{u}(x, t)$ является решением задачи (4) и $v^{ij}(x) \cdot u^k(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, то $\bar{u}(x, t) \in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и $\bar{u}(x, t) \geq \bar{u}_n(x, t)$, где $\bar{u}_n(x, t)$ является решением задачи (3) и функция $\bar{u}_0 \geq 0$, $\bar{u}_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^N)$.

Доказательство утверждения 7. Из априорной оценки решения (см. [3], с.173) имеем принадлежность решения $\bar{u}(x, t)$ задачи (4) соболевскому пространству $W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и для разности $\bar{v}_n(x, t) = \bar{u}(x, t) - \bar{u}_n(x, t) \in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ получаем систему уравнений с задачей Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \bar{v}_n + \begin{pmatrix} V_n^{11} & \dots & V_n^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1} & \dots & V_n^{pp} \end{pmatrix} \bar{v}_n + \bar{f}_n \\ \bar{u}_n(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Рассуждая для системы (10) как и в скалярном случае (см. [1]), получим, что $\bar{v}_n(x, t) \geq 0$, откуда следует заключение утверждения.

Доказательство теоремы 2: Следуя работе [5], фиксируем $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ и предполагаем, что $u_0^j \geq \varepsilon_0$ для $|x - x_0| \leq \delta_0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $j = \overline{1, p}$, $0 < \alpha < 1/2$.

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega : \omega(0) = x, |\omega(t) - x_0| \leq \delta_0, |\omega(s)| < 1/n \text{ при } s \in I = [\alpha t, (1 - \alpha)t]\}.$$

Оценим $\bar{u}_n$ снизу, продолжая оценку (9), полученную в утверждении 6.

$$\bar{u}_n(x, t) \geq$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \cdot \exp \left\{ \int_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{pmatrix} ds \right\} \bar{u}_0(\omega(t)) = \\ & = \int_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \exp \left\{ \gamma t n^2 \begin{pmatrix} c^{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c^{pp} \end{pmatrix} \right\} \bar{u}_0(\omega(t)) = \\ & = \int_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp\{\gamma t n^2 c^{pp}\} \end{pmatrix} \bar{u}_0(\omega(t)) = \\ & = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} u_0^1(\omega(t)) w_x^{q^1}(d\omega) \\ \dots \\ \int_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} u_0^1(\omega(t)) w_x^{q^1}(d\omega) \end{pmatrix} \geq \varepsilon_0 \cdot e^{\gamma t n^2 c} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(\Omega_n) \\ \vdots \\ W_x^{q^p}(\Omega_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $c = \min\{c^{ii}\}_{i=1}^p$, $\gamma = 1 - 2\alpha$.

Пусть $N = 1$, $-\infty < a < b < +\infty$. $r = r([a, b])$ - время выхода траектории за пределы $[a, b]$ для одномерного броуновского распределения с началом в точке x (см.[7]). Т.е. $r(\omega) = \inf\{t > 0 : \omega(t) = a \text{ или } b, \omega(0) = x\}$. Известно, (см.[8]), что $W^{q^i}(x, t) = W_x^{q^i}\{\omega \in \Omega, r(\omega) > t\} = w_x^{q^i}\{r > t\}$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{q^i} \frac{\partial W^{q^i}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^{q^i}}{\partial x^2}, & 0 < x < 2b, t > 0 \\ W^{q^i}(t, 0) = W^{q^i}(t, 2b) = 0, & t > 0 \\ W^{q^i}(0, x) = 1, & 0 < x < 2b \end{cases}$$

Тогда $W^{q^i}(x, t) = \sum_{n-\text{нечет}} \frac{4}{\pi n} \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 q^i t}{8b^2}\} \sin(\frac{\pi n x}{2b})$. Следовательно,

$$W^{q^i}(\frac{1}{n}, t) \geq c_1 \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t q^i}{8}\}, \quad c_1 < 4/\pi \quad (13)$$

Известно (см. [1]), что при $x, x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $\delta_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$

$$\begin{aligned} W_x^{q^i}(\Omega_n) & \geq W_x^{q^i}\{\omega(\alpha t) < \alpha_1/n\} \cdot \\ W_0^{q^i}\{|\omega(s)| < (1 - \alpha_1)/n, s \in [0, (1 - 2\alpha)t]\} \cdot \\ \cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < 1/n\} & = p_1^{q^i} p_2^{q^i} p_3^{q^i}. \end{aligned}$$

Пусть $t_1 = \alpha t$. Тогда $p_1^{q^i}$ и $p_2^{q^i}$ могут быть вычислены и оценены снизу, используя нормальное распределение. Оценка для $p_2^{q^i}$ получается при помощи неравенства (13).

$$\begin{aligned} p_1^{q^i} & = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1 q^i}} \int_{-\alpha_1/n}^{\alpha_1/n} \exp\{-\frac{|s-x|^2}{4t_1 q^i}\} ds \geq \\ & \geq (4\pi t \alpha q^i)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_1}{n} \exp\{-\frac{x^2}{4\alpha t q^i} - \varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad n > N_2(\varepsilon_2, x, t, \alpha). \end{aligned}$$

По теореме Перрона - Фробениуса (см.[6]) для неотрицательных матриц максимальному характеристическому числу матрицы соответствует положительный собственный вектор. Пусть λ - максимальное характеристическое число матрицы

$$\begin{pmatrix} c^{11}/q^1 & \dots & c^{1p}/q^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1}/q^p & \dots & c^{pp}/q^p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\alpha \in R$ при $\lambda \leq (N-2)^2/4$. По теореме Фробениуса (см.[6]) для неотрицательных матриц справедливы неравенства $s \leq \lambda \leq S$, где $s = \min_i \{s_i/q^i\}$, $S =$

$\max_i \{s_i/q^i\}$, s_i - сумма элементов i -й строки матрицы $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$. Это доказывает

теорему 3.

Доказательство теоремы 4: При доказательстве теоремы 4 будем использовать схему доказательства утверждения 6. Вычисляя выражения (9), (10) в нашем случае, получим

$$(e^{\frac{t}{m}A} e^{\frac{t}{m}B} \bar{u}_0)(x) = (4\pi \frac{t}{m})^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left\{ -\frac{|x-y|^2}{4 \frac{t}{m}} \right\} \exp \left\{ \frac{t}{m} \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x) \\ V_n^2(x) & 0 \end{pmatrix} \right\} \bar{u}_0(y) dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (e^{\frac{t}{m}A} e^{\frac{t}{m}B})^m \bar{u}_0(x) &= \left(\left(4\pi \frac{t}{m} \right)^{-\frac{N}{2}} \right)^m \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x_j) \\ V_n^2(x_j) & 0 \end{pmatrix} \frac{t}{m} \right\} \cdot \bar{u}_0(x_m) \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{|x-x_1|^2}{4 \frac{t}{m}} \right\} \cdot \dots \cdot \exp \left\{ -\frac{|x-x_m|^2}{4 \frac{t}{m}} \right\} dx_m \dots dx_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(x_j) \\ V_n^2(x_j) & 0 \end{pmatrix} \frac{t}{m} \right\} \cdot \bar{u}_0(x_m) \cdot P_{\frac{t}{m}}(x, dx_1) \cdot \dots \cdot P_{\frac{t}{m}}(x_{m-1}, dx_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \dots \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & V_n^1 \\ V_n^2 & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \cdot \bar{u}_0(x_m) \cdot P_{\frac{t}{m}}(x, dx_1) \cdot \dots \cdot P_{\frac{t}{m}}(x_{m-1}, dx_m) = \\ &= \int_{\Omega} \exp \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(w(S)) \\ V_n^2(w(S)) & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \bar{u}_0(w(t)) W_x(dw) = \bar{u}_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Это следует из свойства меры Винера и формулы (8). Этот континуальный интеграл является решением задачи (5) (см. формулу Фейнмана-Каца [1]). Следуя работе [2], фиксируем $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ и предполагаем, что $u_0^j \geq \varepsilon_0$ для

$$|x - x_0| \leq \delta_0 \quad (j = 1, 2), \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \delta_0 > 0 \quad (16)$$

Пусть, как и в [2], $0 < \alpha < 1/2$ и

$$\Omega_n = \{w \in \Omega; \quad w(0) = x, |w(t) - x_0| \leq \delta_0, |w(S)| < \frac{1}{n} \text{ при } S \in J = [\alpha t, (1-\alpha)t]\}. \quad (17)$$

Оценим $\bar{u}_n(x, t)$ снизу. Как и выше, в пространстве $\mathbb{R}^N$ вводим отношение частичной упорядоченности: $(a^1, a^2) \geq (b^1, b^2)$, если $a^1 \geq b^1, a^2 \geq b^2$.

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, t) &\geq \int_{\Omega_n} \exp \left\{ \int_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} 0 & V_n^1(\omega(S)) \\ V_n^2(\omega(S)) & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \bar{u}_0 W_x(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega_n} \exp \left\{ \int_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} dS \right\} \bar{u}_0 W_x(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega_n} \exp \left\{ (1-2\alpha)tn^2 \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \bar{u}_0(\omega(t)) W_x(d\omega). \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим $\gamma = 1 - 2\alpha$.

1) Пусть $C^1 = C^2 = C$, тогда, обозначая

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ получим} \\ \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t\gamma n^2 C \\ t\gamma n^2 C & 0 \end{pmatrix} \right\} &= I + t\gamma n^2 C \cdot J + \frac{(t\gamma n^2 C)^2}{2!} \cdot I + \\ &+ \frac{(t\gamma n^2 C)^3}{3!} \cdot J + \dots = ch(t\gamma n^2 C) \cdot I + sh(t\gamma n^2 C) \cdot J = \\ &= \begin{pmatrix} ch(t\gamma n^2 C) & sh(t\gamma n^2 C) \\ sh(t\gamma n^2 C) & ch(t\gamma n^2 C) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя (19) при $C^1 = C^2 = C$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, t) &\geq \int_{\Omega} \exp \left\{ \gamma tn^2 \begin{pmatrix} 0 & C^1 \\ C^2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \bar{u}_0(\omega(t)) W_x(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega_n} \begin{pmatrix} ch(\gamma n^2 Ct) u_0^1(\omega(t)) + sh(\gamma n^2 Ct) u_0^2(\omega(t)) \\ sh(\gamma n^2 Ct) u_0^1(\omega(t)) + ch(\gamma n^2 Ct) u_0^2(\omega(t)) \end{pmatrix} W_x(d\omega) \geq \\ &\geq \int_{\Omega_n} \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} ch(\gamma n^2 Ct) + sh(\gamma n^2 Ct) \\ sh(\gamma n^2 Ct) + ch(\gamma n^2 Ct) \end{pmatrix} W_x(d\omega) = \\ &= \varepsilon_0 \cdot \exp\{\gamma n^2 Ct\} \cdot W_x(\Omega_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

2) Пусть $C^1 \neq C^2$. Используя разложение в ряд Тейлора для экспоненты, аналогично (19) получаем

$$\exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t\gamma n^2 C \\ t\gamma n^2 C & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} u_0^1(\omega(t)) \\ u_0^2(\omega(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(u_0^1(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + \sqrt{\frac{C^1}{C^2}}u_0^2(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{C^2}{C^1}}u_0^1(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + u_0^2(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \right). \quad (21)$$

Тогда из (21) следует, что при $C^1 \neq C^2$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, t) &\geq \int_{\Omega_n} \varepsilon \left(u_0^1(\omega(t))ch(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) + \sqrt{\frac{C^1}{C^2}}u_0^2(\omega(t))sh(t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}) \right) W_x(d\omega) \geq \\ &\geq K \cdot \varepsilon \cdot \exp\{t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}\} \cdot W_x(\Omega_n) \cdot \left(\frac{1}{1}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$K = \min\left\{\sqrt{\frac{C^1}{C^2}}, \sqrt{\frac{C^2}{C^1}}\right\}.$$

Далее будет показано, что основными оценками при $C^1 = C^2 = C$ и в случае $C^1 \neq C^2$ будут являться соответственно следующие:

$$\bar{u}_n(x, t) \geq \varepsilon \cdot K_0 \cdot \exp\{t\gamma n^2 C\} \cdot \exp\left\{-\frac{\pi^2 N^2 \gamma t n^2}{8 - \varepsilon}\right\} \cdot \left(\frac{1}{1}\right), \quad (23)$$

$$\bar{u}_n(x, t) \geq \varepsilon \cdot \widetilde{K}_0 \cdot \exp\{t\gamma n^2\sqrt{C^1C^2}\} \cdot \exp\left\{-\frac{\pi^2 N^2 \gamma t n^2}{8 - \varepsilon}\right\} \cdot \left(\frac{1}{1}\right), \quad (24)$$

из которых и следует утверждение теоремы.

Получим (23) и (24), следуя работе [2]. Для простоты будем находиться в пространстве размерности $N = 1$.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. $r = r([a, b])$ - время выхода траектории за пределы $[a, b]$ для одномерного броуновского движения с началом в точке x , [5]. Т. е. $r(\omega) = \inf\{t > 0 : \omega(t) = a; \text{ б, } \omega(0) = x\}$. Тогда, из [6] следует, что $W(x, t) = W_x\{\omega \in \Omega; r(\omega) > t\} = W_x\{r > t\}$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & a < x < b, \quad t > 0 \\ W(t, a) = W(t, b) = 0, & t > 0 \\ W(0, x) = 1, & a < x < b. \end{cases} \quad (25)$$

Для $b, t_0 > 0$ $W_0\{|\omega(s)| < b \text{ для } 0 \leq s \leq t_0\} = W_0\{r([-b, b]) > t_0\} = W_b\{r([0, 2b]) > t_0\} = W(b, t_0)$, где W удовлетворяет (25) при $[a, b]$ замененном на $[0, 2b]$, т. е. W является решением

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & 0 < x < 2b, \quad t > 0 \\ W(t, a) = W(t, 2b) = 0, & t > 0 \\ W(0, x) = 1, & 0 < x < 2b. \end{cases} \quad (26)$$

Решая (26), получаем

$$W(x, t) = \sum_{n \text{ нечет.}} \frac{4}{\pi n} \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8b^2}\right\} \sin\left(\frac{\pi n x}{2b}\right)$$

$$W(b, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2K+1)} (-1)^K \exp\left\{-(2K+1)^2 \frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\right\} \geq \frac{4}{\pi} (\exp\left\{-\frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\right\} - \exp\left\{-\frac{9\pi^2 t_0}{8b^2}\right\}).$$

Если $b = \frac{1}{n}$, $t_0 = t$, тогда

$$\begin{aligned} W\left(\frac{1}{n}, t\right) &\geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2K+1)} (-1)^K \exp\left\{-(2K+1)^2 \frac{\pi^2 t_0}{8b^2}\right\} \geq \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8}\right\} - \exp\left\{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{8}\right\} \geq \\ &\geq \frac{4 - \varepsilon_1}{\pi} (\exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 t}{8}\right\}) \quad \forall \varepsilon_1 > 0, \quad n > N_1(\varepsilon_1, t). \end{aligned}$$

Следовательно, для больших n

$$W\left(\frac{1}{n}, t\right) \geq C_1 \exp\left\{-\frac{\pi n^2 t}{8}\right\} \quad \forall C_1 < 4/\pi. \quad (27)$$

Пусть $x, x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $\delta_0 > 0$. Тогда, как следует из работы [2], по строгому свойству Маркова [3], получаем для

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha_1 < 1:$$

$$\begin{aligned} W_x(\Omega) &= W_x\{|\omega(s)| < 1/n, \quad s \in J = [\alpha t, (1-\alpha)t], \\ &|\omega(t) - x| \leq \delta_0\} \geq W_x\{|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}; \quad |\omega(s)| < \frac{1}{n}, s \in J; \\ &|\omega(t) - x_0| \geq \delta_0\} = W_x\{|\omega(\alpha t)| < \alpha_1/n\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(s)| < \frac{1}{n}, \quad s \in J; \quad |\omega(t) - x_0| \geq \delta_0/|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\} = \\ &= W_x\{|\omega(\alpha t)| < \alpha_1/n\} \cdot P\{|\omega(s)| < \frac{1}{n}, \quad s \in J/|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega((1-\alpha)t)| < \frac{1}{n}\} = W_x\{|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(s)| < \frac{1}{n}, \quad s \in [0, (1-2\alpha)t]/|\omega(0)| < \frac{\alpha_1}{n}\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} \geq W_x\{|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(s)| < \frac{1}{n}, \quad s \in [0, (1-2\alpha)t]/|\omega(0)| = 0\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} \geq W_x\{|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n}, \quad s \in [0, (1-2\alpha)t]/|\omega(0)| = 0\} \cdot \\ &\cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} = W_x\{|\omega(\alpha t)| < \frac{\alpha_1}{n}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot W_0\{|\omega(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n}, s \in [0, (1-2\alpha)t]\}. \\ & \cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} = p_1 p_2 p_3. \end{aligned} \quad (28)$$

Положим $t_1 = \alpha t$. Тогда p_1 и p_3 могут быть вычислены и оценены снизу, используя нормальное распределение, [2].

$$\begin{aligned} p_1 &= W_x\{|\omega(\alpha t)| \geq \frac{\alpha_1}{n}\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1}} \int_{-\alpha_1/n}^{\alpha_1/n} \exp\left\{-\frac{|s-x|}{4t_1}\right\} dS \geq \\ & \geq (4\pi t \alpha)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_1}{n} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\alpha t} - \varepsilon_2\right\} \quad \forall \varepsilon_2 > 0, n > N_2(\varepsilon_2, t, x, \alpha); \\ p_3 &= P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0/|\omega(0)| < \frac{1}{n}\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1}} \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \exp\left\{-\frac{(s-\omega(0))^2}{4t_1}\right\} dS \geq \\ & \geq \frac{2\delta_0}{\sqrt{(4\pi t \alpha)}} \exp\left\{-\frac{(x_0 + \delta_0)^2}{4\alpha t} - \varepsilon_3\right\} \quad \forall \varepsilon_3 > 0, n > N_3(\varepsilon_3, t, x, \alpha). \end{aligned}$$

Вероятность p_2 можно оценить, используя (27)

$$\begin{aligned} p_2 &= W_0\{|\omega(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n}, s \in [0, (1-2\alpha)t]\} = W_0\left\{r\left(-\frac{(1-\alpha_1)}{n}, \frac{1-\alpha}{n}\right) > (1-2\alpha)t\right\} = \\ &= W_{\frac{1-\alpha_1}{n}}\left\{r\left([0, \frac{2(1-\alpha_1)}{n}]\right) > (1-2\alpha)t\right\} = W\left(\frac{1-\alpha_1}{n}, (1-2\alpha)t\right) \geq \\ &\geq \frac{4-\varepsilon_4}{\pi} \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 t (1-2\alpha)}{(1-\alpha_1)^2 \cdot 8}\right\} \\ &\quad \forall \varepsilon_4 > 0, n > N_4(\varepsilon_4, x, t, \alpha, \alpha_1). \end{aligned}$$

Тогда $W_x(\Omega_n)$ оценивается следующим образом:

$$W_x(\Omega_n) \geq p_1 p_2 p_3 \geq K_0 \cdot \frac{1}{n} \cdot \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 t \gamma}{8-\varepsilon}\right\}. \quad (29)$$

Т. о., получаем, когда $N = 1$, из (20) и (29) оценку (23) при $C^1 = C^2$, а из (22) и (29) оценку (24) при $C^1 \neq C^2$, где

$$\tilde{K}_0 = K_0 \cdot K, \quad K_0 = \frac{4\alpha_1 \delta_0}{\pi \alpha t} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\alpha t} - \frac{(x_0 + \delta_0)^2}{4\alpha t} - \varepsilon_5\right\}. \quad (30)$$

N -мерное броуновское движение $\{w(t) : t \geq 0\}$ состоит в том, что имеется N независимых броуновских движений, [5], т. е. $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_N(t))$, где $\{\omega_j(t) : t \geq 0\}$ есть одномерное броуновское движение. Если $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0N})$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, то

$$W_x(\Omega_n) W_x\{|\omega(t) - x_0| \geq \delta_0, |\omega(s)| < \frac{1}{n}, s \in J\} \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq W_x\{j = \overline{1, N}, \quad |\omega_j(t) - x_{0j}| \leq \delta_{0j}/\sqrt{N}; |\omega_1(s)| < 1/n\sqrt{N}, \quad s \in J\}^N \geq \\ &\geq (W_x\{|\omega_1(\alpha t)| \geq \frac{\alpha_1}{n\sqrt{N}} \cdot W_0\{|\omega_1(s)| < \frac{1-\alpha_1}{n\sqrt{N}}, \quad s \in [0, (1-2\alpha)t]\}) \cdot \\ &\cdot P\{|\omega_1(\alpha t) - x_{01}| \leq \frac{\delta_0}{\sqrt{N}}\}^N \geq K_0 \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2 (1-2\alpha) N^2 t}{8-\varepsilon}\right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{где } K_0 = \left(\frac{4\alpha_1\delta_0}{\sqrt{N}\pi\alpha t}\right)^N \left(\frac{1}{n}\right)^N \exp\left\{-\frac{N|x|^2}{4\alpha t} - \frac{|x_0|^2 N + \delta_0^2}{4\alpha t} - \varepsilon\right\}. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (20) и (22), получаем утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 5: Будем искать неотрицательное решение системы (6) в виде $\bar{u}(x, t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot |x|^{-\alpha}$; $b_1, b_2 \geq 0$. Тогда

$$\Delta \bar{u} = \begin{pmatrix} b_1\alpha(\alpha+2-N) \\ b_2\alpha(\alpha+2-N) \end{pmatrix} |x|^{-\alpha-2}$$

и система (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^1}{\partial t} - b_1\alpha(\alpha+2-N)|x|^{-\alpha-2} = \frac{C^1}{|x|^2} b_2 |x|^{-\alpha} \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} - b_2\alpha(\alpha+2-N)|x|^{-\alpha-2} = \frac{C^2}{|x|^2} b_1 |x|^{-\alpha}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b_1\alpha(N-2-\alpha) - C^1 b_2 = 0 \\ b_2\alpha(N-2-\alpha) - C^1 b_1 = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела решения, нужно чтобы

$$\begin{vmatrix} \alpha(N-2-\alpha) & -C^1 \\ -C^2 & \alpha(N-2-\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Решая квадратное уравнение $-\alpha^2 + (N-2)\alpha - \sqrt{C^1 C^2} = 0$ относительно α , получаем

$$\alpha = \frac{N-2 \pm \sqrt{(N-2)^2 - 4\sqrt{C^1 C^2}}}{2}.$$

Откуда видно, что $\alpha \in \mathbb{R}$ при $\sqrt{C^1 C^2} < (\frac{N-2}{2})^2$.

В заключение отметим, что большая часть настоящей работы была напечатана в сборнике Нелинейные граничные задачи, №6 (1995), С.34-41, в статье Бурский В.П., Самойлова О.В. "Формула Фейнмана-Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем", но так и не дошла до читателя, т.к. почти весь тираж сборника оказался испорченным. В настоящую работу кроме несколько изменённого изложения материала упомянутой статьи вошёл также случай системы (5), где удалось сузить интервал между необходимым и достаточным условиями несуществования положительного решения.

1. Baras P., Goldstein I.A The heat equation with a singular potential // Trans. of the Am. Math. Soc. v. 284, n. 1.- p. 121-139.

В.П. Бурский, О.В. Самойлова

2. Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. - v. XVII.- вып.5(107).- с.3–115.
3. Дифференциальные уравнения с частными производными -I. -М. Итоги науки. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.- Изд. ВИНТИ.- 1990.
4. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова // М.Наука.- 1967.
5. Goldstein I.A. Three lectures on applied analysis // Препринт 7-6-90.- Воронеж Изд. ВГУ.- с.4–12.- 1990.
6. Маркус М., Минк Х Обзор по теории матриц и матричных неравенств // М.Наука.- 1972.
7. McKean H.P. Stochastic integrals // New York, Academic Press.- 1969.
8. Rosencrans S.I. Differential and partial differential equations // Lecture Notes, New Orlean - Tulane Univ.- 1977–1978.

Институт прикладной математики и механики

ул. Р.Люксембург, 74,

83114, г.Донецк, Украина

burskii@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 15.03.2005